Теми лекцій

курсу «Аналітична теорія чисел»

1-2. Вступ. Історичні аспекти теорії чисел.

3. Нескінченні добутки. Формула Вейєрштрасса.

4. Цілі функції скінченного порядку.

5. Гамма-функція Ейлера.

6. Формула Стріглінга. Інтеграл Діріхле.

7. Означення і найпростіші властивості дзета-функції Рімана.

8. Асимптотичний закон розподілу простих чисел.

9. Метод Виноградова в теорії дзета-функцій.

10. Границя нулів дзета-функції.

11. Залишковий член в асимптотичній формулі розподілу простих чисел.

12. Прості числа в інтервалах малої довжини.

13. Властивості L-рядів Діріхле.

14. Прості числа в арифметичних прогресіях.

15. Асимптотичний закон розподілу простих чисел в арифметичних прогресіях.

16. Проблема Гольдбаха.

17. Круговий метод в проблемі Гольдбаха.

18. Проблема Варінга.

19. Круговий метод в проблемі Варінга.

20. Практична реалізація даних проблем.

Література:

1. Н. М. Виноградова «Основи теорії чисел».
2. Н. Л. Привалов «Введение в теорию функций комплексного переменного».
3. А. Л. Карацуба «Основи аналитической теории чисел» - М.: Наука. Главная редакция физико-математичиской литературы, 1983 г., 240 с.

ВСТУП

Навички лічби виникли в примітивній формі на порівняно ранніх ступенях розвитку людського суспільства в процесі трудової діяльності. Поняття «натурального числа», що з’явилося в результаті поступового абстрагування є основою всього подальшого розвитку математики.

Вивчення властивостей натуральних чисел почалося в примітивній формі математиками тих часів і зараз складає основний зміст одного з провідних розділів сучасної математики, який зветься «Теорія чисел». Вивчаючи натуральні числа, ми помічаємо, що серед них зустрічаються такі, що мають дуже різноманітні властивості.

Спочатку ми виділяємо прості числа. І природньо, виникає питання, як вони розподілені серед усіх натуральних чисел? Далі ми можемо помітити числа, які не можна подати у вигляді суми двох квадратів натуральних чисел і поставити питання про те, які саме числа мають цю властивість і як часто вони зустрічаються.

В теорії чисел, природньо, виділяються і розглядаються в першу чергу ті проблеми, які глибоко і достатньо безпосередньо зв’язані з практикою і важливі для побудови математики в цілому. Деякі теоретико-числові задачі виникають вже в рамках шкільного курсу математики. І далі в теорії чисел розглядаються вже не тільки натуральні числа, але і множини *Z* і *Q.* Якщо розглядати корені многочлена

(\*)

з цілими коефіцієнтами, то звичайні цілі числа відповідають випадку, коли *n=1*.

У множині комплексних чисел природньо виділити цілі алгебраїчні числа, що є коренями многочленів (\*) з цілими коефіцієнтами.

Вивчення властивостей таких чисел є змістом одного з найважливіших розділів сучасної теорії чисел – алгебраїчної теорії чисел. В теорію чисел включають також питання наближення дійсних чисел раціональними дробами або, як їх ще називають, діофантові наближення. При більш широкому розумінні – це питання розв’язування в цілих числах лінійних і нелінійних нерівностей або систем нерівностей з дійсними коефіцієнтами. Сам Діофант займався задачею розв’язування алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами та їх систем в цілих числах (або раціональних).

Кількість невідомих в діофантових рівняннях переважає кількість рівнянь і тому їх іноді називають невизначеними. Найпростішим діофантовим рівнянням є рівняння виду:

де і – цілі взаємнопрості числа. Таке діофантове рівняння має нескінченну множину розв'язків: якщо знайшли один розв'язок , то , де

,

теж будуть розв'язками, якими вичерпується вся множина розв'язків.

Ще може бути рівняння 2-го степеня:

де , , , , , .

Зокрема, велика теорема Ферма:

рівняння

не має розв'язків в цілих додатних числах , , – була сформульована П. Ферма в 1670 р. на полях книги Діофанта «Арифметика» (довів для ; Ейлер довів для ; Діріхле і Лежандр (1825р.) для ; Т. Ламе (1839р.) для ). Більше 300 років сотні математиків намагалися довести її в загальному випадку (). І лише в 1994 р. англійський математик Ендрю Джон Уайлс довів цю теорему (для еліптичних кривих над раціональними числами). Він використовував гіпотезу Таніями-Сімури.

Для сучасної теорії чисел характерне використання різних методів досліджень: так багато проблем теорії чисел можуть бути сформульовані в геометричній формі і до розв’язування такого роду задач застосовують геометричні міркування (геометрична теорія чисел).

В сучасній теорії чисел широко використовують методи матаналізу, зокрема, при вивченні питань розподілу простих чисел часто доводиться використовувати теорію функцій комплексної змінної. Той розділ, де використовуються методи матаналізу, називається «Аналітична теорія чисел».

Теорія чисел не лише використовує методи, розроблені в суміжних математичних дисциплінах, але й сама впливає на формування цих дисциплін. Так, дослідження в теорії чисел, що зв’язані з теоремою Ферма, значно вплинули на сучасну алгебру, а поняття «кільця», «ідеала» з теорії чисел є одними з основних понять сучасної математики.

Сучасну теорію чисел можна розбити на розділи:

1. Елементарна теорія чисел (теорія порівнянь, теорія форм, невизначені рівняння). Сюди відносять питання, що є безпосереднім розвитком теорії подільності і подання чисел певному вигляді. Більш загальною є задача розв’язування систем невизначених рівнянь, тобто таких рівнянь, де розв’язки повинні бути цілими числами. Це вже вище згадані діофантові рівняння. В усіх таких задачах часто використовуються звичайні арифметичні і алгебраїчні методи досліджень.
2. Алгебраїчні теорія чисел включає питання, зв’язані з вивченням різних класів алгебраїчних чисел.
3. Діофантові наближення – цей розділ включає задачі наближення дійсних чисел раціональними дробами, а також питання вивчення арифметичної природи різних класів чисел.
4. Аналітична теорія чисел розглядає задачі, для розв’язування яких застосовують методи математичного аналізу.
5. Геометрична теорія чисел – для розв’язування задач використовують геометричні міркування.

ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Ранній період розвитку арифметики характеризується повільним розвитком самого процесу підрахунку, виявляються можливості його необмеженого продовження, розв’язуються конкретні арифметичні задачі. Так, в працях Евкліда («Початки» ІІІ вік до н.е.) зустрічається ряд основних положень теорії подільності і вказується на нескінченність множини простих чисел.

Грецьким математикам був відомий спосіб виділення простих чисел з натурального ряду, що отримав назву «ератосфенового решета»: закреслюємо 1. Число 2 – просте. Закреслюємо всі натуральні числа, що діляться на 2 (парні). Число 3 – перше незакреслене, при цьому буде простим. Далі закреслюємо всі натуральні числа, що діляться на 3. Перше незакреслене при цьому 5 – просте. Далі викреслюємо всі натуральні числа, що діляться на 5. Перше незакреслене 7– просте. І так далі. Продовжуючи процес, можна знайти скільки завгодно великий відрізок послідовності простих чисел.

Починаючи з робіт Діофанта (приблизно ІІІ ст. н. е.), теорія чисел виділяється, як особлива область математики.

В період занепаду античної культури роботи Діофанта були майже забуті. В VIII – IX ст. в арабських країнах на територіях теперішніх Іраку, Середньої Азії і інших виникає своєрідна математична культура.

Арабська математика культивувала дослідження з алгебри і тригонометрії, але до теоретико-числових задач проявляла незначний інтерес. Наприклад, Алькарчі (ХІ ст.) коментував Діофанта, але нічого істотно нового не дослідив.

В Європі, починаючи з хрестових походів і до ХVII ст., розвиток теорії чисел був дуже повільним. Математики зазвичай розглядали окремі конкретні задачі теоретико-числового характеру. Загальні методи були майже невідомі. В ХV ст. Регіомонтан (1436-1476 рр.) знайшов труди Діофанта і почав систематично їх вивчати. Праці Діофанта було надруковано в ХVІ і ХVІІ ст. на латинській і францізькій мовах і Вієт (1540-1603 рр.) та Баше де Мезір’як (1580-1638 рр.) їх вивчали і трохи доповнили новими результатами.

В справжньому розумінні теорію чисел як науку розглядають, починаючи з робіт французького математика П. Ферма (160-1655 рр.), який отримав основний результат теорії подільності на задане просте число і розв’язав ряд важливих задач теорії невизначених рівнянь.

У ХVІІІ ст. Ейлер (1707-1783 рр.) узагальнив основний результат Ферма для випадку ділення на складені числа, створив загальну теорію степеневих лишків, отримав ряд результатів про подання чисел у вигляді форми певного типу, дослідив ряд систем невизначених рівнянь і вивчав розбиття чисел на доданки. Він вперше застосував методи матаналізу до теорії чисел, а саме використовував нескінченні ряди і добутки для отримання теоретико-числових результатів.

Після робіт Ейлера майже всі великі математики ХVІІІ і ХІХ ст. в різній мірі займаються теорією чисел. Зокрема, Фр. Лагранж (1735-1813 рр.) розвинув далі методи Ейлера по поданні чисел у вигляді бінарної квадратичної форми:

довів теорему про подання чисел у вигляді суми чотирьох квадратів і досліджував ланцюгові дроби.

Великий вплив на подальший розвиток теорії чисел мали праці А.Лежандра (1752-1833 рр.) по теорії невизначених рівнянь вищих степенів. Лежандр знайшов емпіричну форму для кількості простих чисел в заданих межах.

К. Гаус (1777-1855 рр.), вивчивши роботи Ейлера, Лагранжа і Лежандра створив цілісну теорію, яку назвав «Теорія порівнянь». Також Гаус отримав фундаментальні результати в теорії квадратичних форм і почав розглядати числа виду

де і – цілі. Ці числа назвали комплексними.

Пізніше в працях Куммера (1810-1893 рр.), Діріхле (1805-1859 рр.), Кронекера (1823-1891рр.), Дерекінда (1831-1916рр.), Золотарьова (1847-1878рр.) була побудована теорія алгебраїчних чисел, а праці Ліувіля (1809-1882 рр.) і Ерміта (1822-1901 рр.) заклали основу теорії трансцендентних чисел.

В 1873 р. Ерміт доів, що число *е* трансцендентне, а в 1882 р. Ліндеман довів, що – трансцендентне.

Фундаментом аналітичної теорії чисел стали роботи Діріхле, П.Л.Чебишова і Рімана.

Діріхле вперше довів нескінченність множини простих чисел в арифметичних прогресіях загального виду і дав асимптотичні оцінки для важливих числових функцій.

Великий російський математик П. Л. Чебишов (1821-1894 рр.) вніс особливо важливий вклад в розвиток математики, зокрема теорії чисел. Він перший дав оцінку зростанню функції , і пізніше Б. Ріман (1826-1866 рр.), використовуючи функції комплексної змінної, зміг визначити розподіл простих чисел. Російський математик Є. І. Золотарьов розробив теорію цілих алгебраїчних чисел, а А. А. Марков (1856-1922 рр.) вивчав теорію квадратичних форма, і Г. Ф. Вороний (1868-1908 рр.) розвивали аналітичну теорію чисел.

На початку ХХ ст. Ландау, Бор, Г. Харді, Дж. Літтлвуд, Є. Титчмарш, К.Зігель, А. Пейдж, Н. Г. Чудаков, А. Сельберг і інші детально досліджували дзета-функцію Рімана і *L* - ряди Діріхле, а І. М. Виноградов детально розробив метод тригонометричних сум і з його допомогою розв’язав ряд раніше нерозв’язаних задач.

В 60-70 роках ХХ ст. великі успіхи в аналітичній теорії чисел були досягнуті завдяки ідеям Ю. В. Лінника. Він довів, що кожне велике натуральне число є сумою семи кубів натуральних чисел; встановив, що майже для всіх модулів вірна гіпотеза І. М. Вионградова про найменший квадратичний нелишок. Створений ним метод великого решета знайшов важливе застосування в адитивній теорії чисел.

Методи Лінника і його учнів збільшили можливості використання *L* – рядів Діріхле для розв’язування різних задач аналітичної теорії чисел.

Метод ератосфенового решета був розроблений в роботах В. Бруна (Норвегія). Він вивчав проблему Гольдбаха (парне число можна подати у вигляді суми двох простих чисел).

Російський математик Л. Г. Шнірельман в 30-х роках ХХ ст. розробив загальний метод вивчення адитивних властивостей натуральних чисел і при цьому поставив у цій тематиці ряд нових задач, які розглядали А. Я. Хінчин, Г.Ман, Н. П. Романов та інші. В роботах А. Сельберга (Норвегія) основні закони розподілу простих чисел натурального ряду і в арифметичних прогресіях були отримані без застосування теорії функцій комплексної змінної.

Великі успіхи у ХХ ст. були досягнуті також в теорії діофантових наближень, в теорії трансцендентних чисел (А. О. Гельфонд) і в алгебраїчній теорії чисел.

НЕСКІНЧЕННІ ДОБУТКИ. ФОРМУЛА ВЕЙЄРШТРАССА

Означення 1: Нехай

нескінченна послідовність комплексних чисел . Нескінченним добутком називається вираз виду:

Вирази виду:

називаються частковими добутками.

Означення 2: Якщо послідовність чисел (2) збігається при до числа , то кажуть, що нескінченний добуток (1) збігається і має значення рівне , тобто

Якщо ж послідовність не збігається або , то нескінченний добуток (1) називається розбіжним.

Теорема 1 (ознака збіжності добутку): Якщо ряд

абсолютно збіжний, то збіжний і добуток (1).

Доведення: (4) абсолютно збіжний, отже, ряд

збіжний. Тому

і може бути , , або .

Припустимо спочатку, що

Тоді

Звідси випливає збіжність послідовності

і відповідно добутку (1).

Нехай тепер – довільні комплексні числа. Потрібно довести, що при збігається 2 послідовності дійсних чисел.

(5)

і

(6)

Щоб збігалася (5), необхідно і достатньо збіжності послідовності . Але

де , а

Тоді збіжність випливає з доведеного. Збіжність (6) випливає з того, що при достатньо великих і :

Теорему доведено.

Теорема 2: Нехай – нескінченна послідовність аналітичних в області *G* функцій, причому:

1. Додатний ряд чисел

Тоді добуток

збіжний для , а функція

є аналітичною в області , причому , .

Доведення: збіжність (7) випливає з теореми 1. Щоб довести аналітичність , потрібно довести, що послідовність аналітичних функцій:

є рівномірно збіжною до , і використати потім теорему Вейєрштрасса.

Покладемо

Доведемо спочатку, що

Дійсно,

Переходимо до границі при , отримаємо (8). Тому

при і .

Означення 3: Функція *f(s)*, яка аналітична в довільній скінченній частині комплексної площини, називається цілою.

Теорема 3 (про існування цілої функції, що має своїми нулями лише числа заданої нескінченної послідовності): Нехай

нескінченна послідовність комплексних чисел, причому

і

Тоді існує ціла функція *G(s)*, яка має своїми нулями лише числа (якщо серед них є рівні, то нуль *G(s)* буде мати відповідну кратність).

Доведення: При покладемо

і розділяємо нескінченний добуток

Доведемо, що цей добуток збігається площини комплексної змінної і є цілою функцією *G(s)* з нулями

Розглянемо круг *С* радіуса і нескінченний добуток

Доведемо, що цей добуток збіжний до аналітичної функції в крузі . Тоді (9) теж буде аналітичною функцією в цьому крузі, яка має там тільки нулі . Оскільки , то тоді теорема буде доведена. При , , покладемо:

де – головна вітка логарифма, тобто при вона рівна 0.

Тоді при , і :

і

Таким чином потрібно довести, що ряд

збіжний в до аналітичної функції. Але при і

маємо

Звідки випливає рівномірна збіжність (10) в області , тобто аналітичність (9) в крузі *С*.

Наслідок 1 (формула Вейєрштрасса): Нехай

послідовність комплексних чисел, що задовільняє умови теореми 3. Тоді функція *G(s):*

є цілою і має своїми нулями тільки числа 0,

Наслідок 2: Нехай послідовність чисел

задовільняє умови теореми 3, і, крім того, існує ціле число таке, що збігається ряд

Тоді функція :

задовільняє теорему 3.

Доведення: дійсно, в цьому випадку при

ряд

мажорується рядом

Теорема 4: Кожна ціла функція може бути подана у вигляді:

де – ціла функція, а числа 0, - нулі , розміщені в порядку зростання їх модулів. Якщо, крім того, послідовність , задовільняє умови наслідку 2, то

Доведення: Нулі не можуть мати граничної точки, тобто їх можна розмістити в порядку зростання модулів. За теоремою 3 побудуємо цілу функцію , яка має своїми нулями нулі . Покладемо

при

Очевидно, що – ціла функція, ніде не рівна 0, тоді – ціла функція. Але тоді

де – ціла функція.

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Означення 1: Нехай – ціла функція і

Якщо існує , що при , то називається цілою функцією скінченного порядку. В цьому випадку називається порядком . Якщо ж (11) не виконується ні для якого , то говорять, що порядок рівний .

Означення 2: Нехай

послідовність комплексних чисел таких, що

Якщо існує , для якого

то кажуть, що послідовність (12) має скінченний показник збіжності. В цьому випадку називається показником збіжності (12). Якщо ж (13) не виконується ні при якому , то кажуть, що показник збіжності (12) рівний .

Теорема 5: Нехай – ціла функція скінченного порядку і , – послідовність всіх нулів , причому Тоді послідовність має скінченний показник збіжності ,

де – найменше ціле число, для якого

– многочлен степеня і . Якщо, крім того, , існує нескінченна послідовність

така, що

, , то і ряд

ГАММА-ФУНКЦІЯ ЕЙЛЕРА

Позначимо

Стала називається константою Ейлера.

Означення 1: Гамма-функція Ейлера *Г(s)* задається рівністю

З попередніх означень і теорем випливає, що – ціла функція порядку не вище першого. – функція, аналітична на всій -площині за винятком точок , де вона має прості полюси.

Теорема 1 (формула Ейлера): Має місце рівність

Доведення:

Наслідок 1:

Наслідок 2:

Теорема 2: Має місце рівність

Із (1) отримуємо

Наслідок 1: Для :

Теорема 3: Якщо , то

Доведення: Подамо у вигляді нескінченноо добутку. Функція – ціла функція першого порядку, має нулі , тому

де

Логарифмуючи, а потім диференціюючи цю рівність, отримаємо:

Переходячи до , отримаємо , .

Потім

Знову при знаходимо , тобто

Знайдемо

За теоремою 2: . Отже,

Теорему доведено.

Наслідок 1: .

Теорема 4: При :

ФОРМУЛА СТІРЛІНГА

Дослідимо поведінку при .

Теорема 1: При і має місце формула (Стрілінга):

причому стала в *О* залежить лише від .

Наслідок 1: Функція є цілою першого порядку.

Наслідок 2: При і :

причому стала в *О* залежить лише від .

Наслідок 3: При

БЕТА-ФУНКЦІЯ ЕЙЛЕРА І ІНТЕГРАЛ ДІРІХЛЕ

Означення 1: Бета-функція при задається рівністю:

Лема: Має місце рівність

Означення 2: Інтеграл

де – неперервна функція, , , називається інтегралом Діріхле.

ОЗНАЧЕННЯ І ВЛАСТИВОСТІ ДЗЕТА-ФУНКЦІЇЇ РІМАНА

Означення 1: При функція

називається дзета-функцією Рімана.

Із означення випливає, що – аналітична функція в .

Лема 1 (формула Ейлера): При має місце рівність

Наслідок 1: якщо .